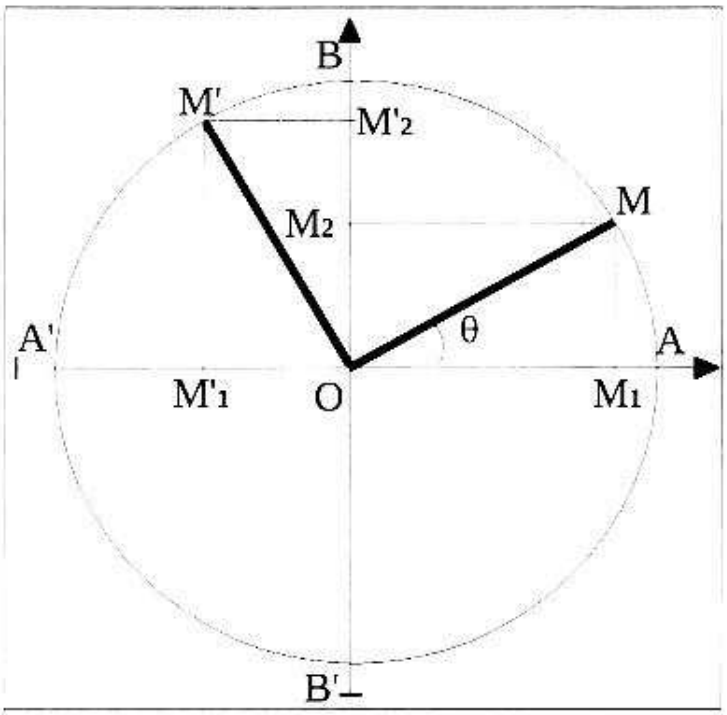
1 Trigonométrie

Tous les angles sont comptés positivement dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.



<u>On définit:</u>
OA = OB = 1
$OM_1 = \cos(\theta)$ $OM_2 = \sin(\theta)$

$-1 < \cos(\theta) < 1$
$-1 < \sin(\theta) < 1$

<u>Par symétrie</u>:
$\cos(\theta + 90°) = -\sin(\theta)$
$\sin(\theta + 90°) = \cos(\theta)$

$\cos(90° - \theta) = \sin(\theta)$, $\sin(90° - \theta) = \cos(\theta)$, $\cos(\theta + 360°) = \cos(\theta)$
$\sin(\theta + 360°) = \sin(\theta)$

on peut ajouter à θ ou retrancher 360° autant de fois qu'on veut sans changer la valeur du sinus ni du cosinus

<u>Attention</u>

Une valeur de $\cos(\theta)$ [ou de $\sin(\theta)$] donnée avec son signe, correspond toujours à deux valeurs possibles de θ

<u>Quelle que soit la méthode de calcul</u> les fonctions inverses de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ ne donnent qu'une seule valeur de θ :

$0° < \theta < 180°$ pour le cosinus

$-90° < \theta < 90°$ pour le sinus

En fonction des données du problème de position il faudra choisir la valeur convenable de θ .

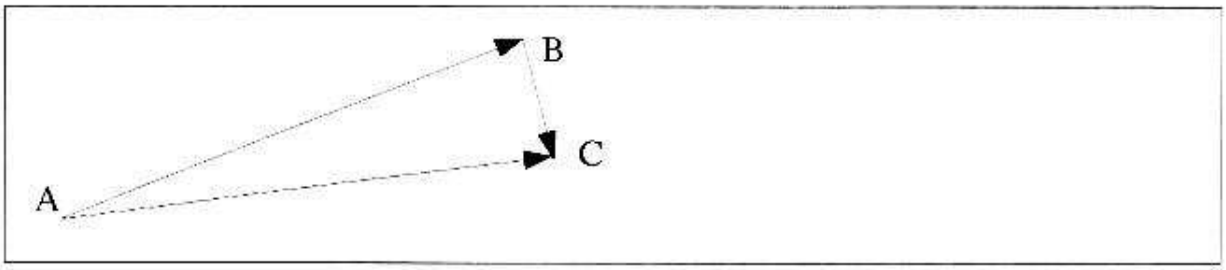
2 Vecteurs

Pour les calculs de trigonométrie dans l'espace il est commode d'utiliser des segments de droite orientés qu'on appelle des vecteurs.

Un vecteur est donc caractérisé par deux points: son origine et son extrémité (toujours ecrits dans cet ordre). Sur la figure on peut donc considérer les vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}$ etc. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont différents, on dit qu'ils sont opposés. La longueur (ou module) du vecteur $\overrightarrow{AB}$ s'écrit AB

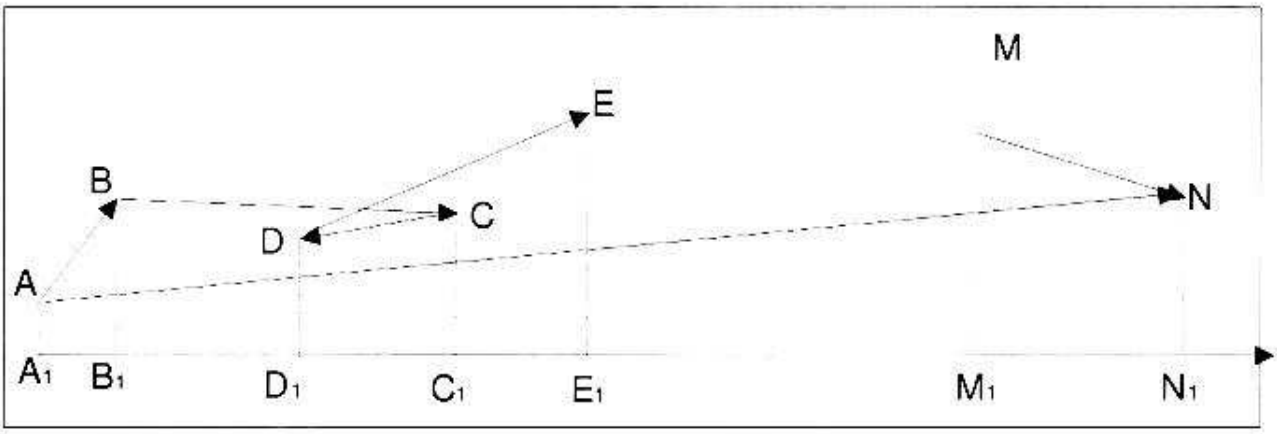
Les vecteurs sont d'ailleurs fréquemment utilisés en navigation pour représenter la vitesse du navire ou le courant. On est ainsi amené à faire la « somme » de deux vecteurs: pour cela on les place bout à bout et le vecteur somme a pour origine l'origine du premier vecteur et pour extrémité l'extrémité du second vecteur.

Sur la figure on voit que le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est la somme des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ et l'on écrit $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$



On convient que l'écriture $3\times\overrightarrow{AB}$ représente la somme de trois vecteurs égaux $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}=3\times\overrightarrow{AB}$ .Il est également commode d'écrire $\cos(\alpha)\times\overrightarrow{AB}$ pour représenter le vecteur dont l'origine est A, la direction celle du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et la longueur $AB\times\cos(\alpha)$.

Projections *sur un axe*



$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} \ldots\ldots\ldots + \overrightarrow{MN}$$
$$[\overrightarrow{A_1N_1}]=[\overrightarrow{A_1B_1}]+[\overrightarrow{B_1C_1}]+[\overrightarrow{C_1D_1}]+[\overrightarrow{D_1E_1}]+ \quad +[\overrightarrow{M_1N_1}]$$

On voit ainsi que ***la projection de la somme est la somme des projections des vecteurs.***

Produit scalaire

Le mot scalaire veut dire que ce produit n'est pas un vecteur mais tout simplement un nombre.

Le produit scalaire des deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est désigné par l'écriture $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et ce nombre est le produit des longueurs des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ par le cosinus de leur angle α , donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$ puisque $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$. Le produit scalaire peut être positif ou négatif

Si $\vec{U}$ est le vecteur unité de l'axe: $\overrightarrow{AB}.\vec{U} = AB \times 1 \times \cos(\alpha)$ est la mesure de la projection de $\overrightarrow{AB}$ (positive ou négative suivant que l'angle α de $\overrightarrow{AB}$ et de $\vec{U}$ est <90° ou >90°).

On voit tout de suite que *le produit scalaire de deux vecteurs perpendiculaires est nul*

et que la somme et le produit scalaire des vecteurs jouissent de la propriété fondamentale suivante:

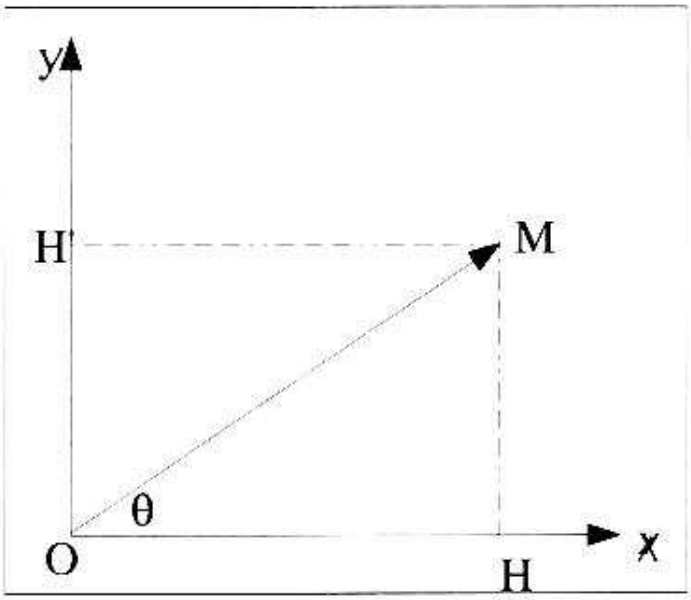
$\vec{U}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\vec{U}\cdot\overrightarrow{AB}+\vec{U}\cdot\overrightarrow{BC}$ (**D**) analogue à celle des nombres ordinaires:

a.(b+c)=a.b+a.c.

La propriété (**D**) traduit le fait que la valeur algèbrique de la projection de la somme de deux vecteurs sur un axe est égale a la

somme des valeurs algèbriques des projections de chacun des deux vecteurs. (Ceci est évident sur la figure précédente)

Représentation du plan sur deux axes perpendiculaires



$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OH'}$

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont les vecteurs unitaires des axes Ox et Oy :

$\vec{u}.\vec{v} = 0$, $\vec{u}.\vec{u} = \vec{v}.\vec{v} = 1$

$\overrightarrow{MH} = \cos(\theta).\vec{u}$

$\overrightarrow{MH'} = \sin(\theta).\vec{v}$

De façon générale:

$\overrightarrow{OM} = a.\vec{u} + b.\vec{v}$

$\overrightarrow{ON} = c.\vec{u} + d.\vec{v}$

L'angle α des deux vecteurs est donné par leur produit scalaire:

$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = OM.ON.cos(\alpha)$

soit finalement:

cos(α) = (a.c+b.d)/(OM.ON)

Les vecteurs de l'espace à 3 dimensions peuvent être décomposés suivant 3 axes deux à deux orthogonaux:

$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ étant vecteurs unités sur Ox, Oy, Oz.

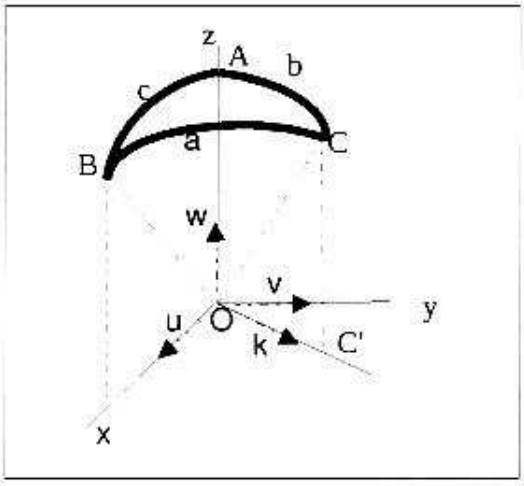
Un vecteur $\overrightarrow{OP}$ se décomposera suivant $\overrightarrow{OP} = a.\vec{u} + b.\vec{v} + c.\vec{w}$ et on aura

$\vec{u}.\vec{u} = \vec{v}.\vec{v} = \vec{w}.\vec{w} = 1$, $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{w} = \vec{w}.\vec{u} = 0$

3 Etablissement des formules classiques

sin(h)=sin(L).sin(D)+cos(L).cos(D).cos(LHA) *(1)*
cos(Z)=[sin(D)-sin(h).sin(L)]/[cos(h).cos(L)] *(2)*

on choisit un système d'axes Oxyz liés au triangle de position ABC:



A est sur l'axe z
B est dans le plan xOz
C' est la projection de C sur le plan xOy. On désigne les mesures des angles BOC, AOC et AOB par celles des arcs correspondants a,b,c. L'angle xOC' est égal à l'angle A du triangle sphérique.

$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{k}$ sont vecteurs unité sur Ox, Oy, Oz, OC' donc $\vec{k}=\cos(A).\vec{u}+\sin(A).\vec{v}$ et $\overrightarrow{OC}=\cos(b).\vec{w}+\sin(b).\vec{k}$ soit finalement:

$$\overrightarrow{OC}=\sin(b).\cos(A).\vec{u}+\sin(b).\sin(A).\vec{v}+\cos(b).\vec{w}$$

de même $\overrightarrow{OB}=\cos(c).\vec{w}+\sin(c).\vec{u}$.

Alors, par définition de l'arc a:

cos(a) est le produit scalaire $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC}$ soit en fonction des deux

$$\cos(a) = \cos(b)\times\cos(c)+\sin(b)\times\sin(c)\times\cos(A)$$

$$\cos(A) = (\cos(a)-\cos(b)\times\cos(c))/(\sin(b)\times\sin(c))$$

expressions précédentes:

Si l'on substitue respectivement **PAZ** à **ABC**, avec :

a = 90° - l, **z =90° - D**, **p = 90°- h** et **P = LHA** alors les formules (1) et (2) en résultent

Produit vectoriel

$\overrightarrow{OA} x \overrightarrow{OB}$

est le vecteur de longueur

$OA \times OB \times \sin(\alpha)$, perpendiculaire au plan OAB et formant avec OA et OB un trièdre direct; ainsi $\overrightarrow{OB} x \overrightarrow{OA}$ est le vecteur opposé de $\overrightarrow{OA} x \overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OA} x \overrightarrow{OA}$ est un vecteur nul.

Si l'on a trois vecteurs unitaires $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ formant un trièdre direct alors $\vec{u} x \vec{v} = \vec{w}, \vec{v} x \vec{w} = \vec{u}, \vec{w} x \vec{u} = \vec{v}$.

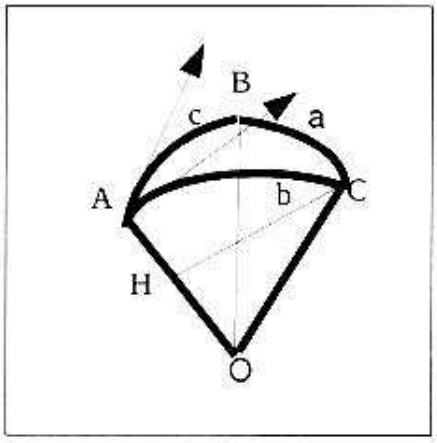
On démontre aisément que pour 3 vecteurs de l'espace $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ on a la relation suivante:

$\vec{a}.(\vec{b} x \vec{c}) = \vec{b}.(\vec{c} x \vec{a}) = \vec{c}.(\vec{a} x \vec{b})$ (1) [voir la preuve à la fin]

Dans le triangle sphérique

$\vec{t}_b$ et $\vec{t}_c$ sont les vecteurs unitaires tangents en A aux arcs AB et AC respectivement

OA = OB = OC =1



CH est perpendiculaire à OA

On sait que

$\cos(a) = \cos(b) \times \cos(c) + \sin(b) \times \sin(c) \times \cos(A)$ (2)

et de même:

$\cos(b) = \cos(c) \times \cos(a) + \sin(c) \times \sin(a) \times \cos(B)$ (3)

Les relations évidentes suivantes:

$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HC}$, $\overrightarrow{HC} = \sin(b).\vec{t}_c$, $\overrightarrow{OH} = \cos(b).\overrightarrow{OA}$,

impliquent $\vec{t}_b x \vec{t}_c = \sin(A).\overrightarrow{OA}$

De plus: $\sin(b).\vec{t}_c = \overrightarrow{OC} - \cos(b).\overrightarrow{OA}$,et

$\sin(c).\vec{t}_b = \overrightarrow{OB} - \cos(c).\overrightarrow{OA}$

vont nous permettre de calculer $\sin(b).\sin(c)$, en effet:

$\sin(b).\sin(c).\vec{t}_b x \vec{t}_c =$

$\sin(b).\sin(c).\sin(A).\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} x \overrightarrow{OC} - \cos(b).\overrightarrow{OB} x \overrightarrow{OA} - \cos(c).\overrightarrow{OA} x \overrightarrow{OC}$ (4)

En faisant le produit scalaire des deux membres de (3) par $\overrightarrow{OA}$ et en divisant par $\sin(a).\sin(b).\sin(c)$ on obtient:

$\sin(A) \div \sin(a) = [\overrightarrow{OA}.(\overrightarrow{OB} x \overrightarrow{Oc})] \div [\sin(a).\sin(b).\sin(c)]$

La relation (1) implique alors :

$\sin(A) \div \sin(a) = \sin(B) \div \sin(b) = \sin(C) \div \sin(c)$ et $\sin(B) \div \sin(A) = \sin(b) \div \sin(a)$ (6)

Des relations (2) et (6) on déduit:

$\sin(B).\cot(A)=[\cos(a)-\cos(b).\cos(c)]\div[\sin(c).\sin(a)]$ (7)

La relation (3) équivaut à

$[\cos(b).\cos(c)]\div[\sin(c).\sin(a)]=[\cos^2(c).\cos(a)]\div[\sin(c).\sin(a)]+\cos(B).\cos(c)$ et alors le second membre de (7) devient

$[\cos(a).(1-\cos^2(c))]\div[\sin(c).\sin(a)]-\cos(B).\cos(c)$ et la relation (7) se met sous la forme suivante:

$$\boxed{\sin(B).\cot(A)=\sin(c).\cot(a)-\cos(B).\cos(c)}$$

qui est utilisée dans la table de Bataille.

////////////////////////////////

On va prouver la relation $\boxed{\vec{a}.(\vec{b}x\vec{c})=\vec{b}.(\vec{c}x\vec{a})=\vec{c}.(\vec{a}x\vec{b})}$ (1)

elle peut se vérifier en choisissant les vecteurs unitaires des axes comme suit:

$\vec{u}$ colinéaire à $\vec{a}$

$\vec{v}$ dans le plan de $\vec{a}$ et $\vec{b}$

$\vec{w}$ terminant le trièdre orthonormé direct $\vec{u}$ $\vec{v}$ $\vec{w}$

alors $\vec{a}=a1\,\vec{u}$, $\vec{b}=b1\,\vec{u}+b2\,\vec{v}$, $\vec{c}=c1\,\vec{u}+c2\,\vec{v}+c3\,\vec{w}$

et $\vec{c}\,x\,\vec{a}=-c2a1\,\vec{w}+c3a1\,\vec{v}$ donc $\vec{b}.(\vec{c}\,x\,\vec{a})=c3.a1.b2$

de même $\vec{a}\,x\,\vec{b}=a1b2\,\vec{w}$ donc $\vec{c}.(\vec{a}\,x\,\vec{b})=c3a1b2$

et parconséquent: $\vec{b}.(\vec{c}\,x\,\vec{a})=\vec{c}.(\vec{a}\,x\,\vec{b})$